

عملیات ریاضی با ماتریس‌ها

عملیات اصلی ریاضی با ماتریس‌ها عبارتند از: جمع، تفریق، ضرب، معکوس، دترمینان‌ها و حل معادلات و ریشه-ها. نتایج این عملیات برای به دست آوردن حل عددی مسائل مهندسی مختلف به کار می‌رود.

۲-۸-۱ چهار عمل اصلی بر روی ماتریس‌ها

روش طبیعی و ساده‌ای برای جمع و تفریق ماتریس‌ها وجود دارد. مثلاً برای دو ماتریس A و B که به صورت زیر تعریف می‌شوند، جمع و تفریق ماتریس‌ها به روشی بسیار ساده مانند زیر انجام می‌شود.

```
>> A=[۱ ۲ ۳; ۴ ۵ ۶];
>> B=[۲ ۰ -۱; ۱ ۲ ۷];
>> A+B
ans =
     ۳     ۲     ۲
     ۵     ۷    ۱۳
```

فقط ماتریس‌هایی می‌توانند با هم جمع شوند که ابعاد یکسانی دارند. در متلب سایت سیم پاور یک استثناء وجود دارد که بسیار مفید می‌باشد. اگر قرار باشد به هر یک از اعضا ماتریس A عدد C اضافه شود، به وسیله فرمان $A+C*\text{ones}(\text{size}(A))$ یا خیلی ساده‌تر با فرمان $A+C$ این عمل قابل اجرا است. بنابراین در صورتیکه X یک بردار باشد، می‌توان مقدار اسکالر t را به مولفه‌های X با فرمان $X+t$ اضافه کرد.

یک ماتریس را می‌توان در یک عدد اسکالر ضرب و بر یک عدد اسکالر غیرصفر نیز تقسیم کرد.

```
>> ۲*A
ans =
     ۲     ۴     ۶
     ۸    ۱۰    ۱۲
>> A/۲
ans =
    ۰.۵۰۰۰    ۱.۰۰۰۰    ۱.۵۰۰۰
    ۲.۰۰۰۰    ۲.۵۰۰۰    ۳.۰۰۰۰
```

جمع و تفریق

اگر دو ماتریس a و b دارای ابعاد $(m \times n)$ باشند، آنگاه:

$$a \pm b = \rightarrow (m \times n)$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & \dots & a_{1n} \pm b_{1n} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{m1} \pm b_{m1} & & & a_{mn} \pm b_{mn} \end{bmatrix}$$

ضرب

اگر ماتریس $a(m \times k)$ و ماتریس $b(k \times n)$ مفروض باشند، آنگاه:

$$c = ab = \rightarrow (m \times n)$$

$$\begin{bmatrix} \sum_{j=1}^k a_{1j} b_{j1} & \sum_{j=1}^k a_{1j} b_{j2} & \dots & \sum_{j=1}^k a_{1j} b_{jn} \\ \sum_{j=1}^k a_{2j} b_{j1} & \sum_{j=1}^k a_{2j} b_{j2} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \sum_{j=1}^k a_{mj} b_{j1} & & & \sum_{j=1}^k a_{mj} b_{jn} \end{bmatrix}$$

C یک ماتریس $(m \times n)$ است. توجه کنید که ضرب دو ماتریس فقط هنگامی تعریف پذیر است که تعداد ستون های ماتریس اول و تعداد سطرهای ماتریس دوم باهم برابر باشند که در این مورد k است. به عبارت دیگر عبارت $(m \times n) = (m \times k)(k \times n)$. عبارت متلب سایت سیم پاور برای بیان ضرب ماتریس عبارت است از:

>> c=a*b

$$w(x,y) = \sum_{j=1}^k d_j e_j(x)g_j(y) = \sum_{j=1}^k f_j(x)g_j(y)$$

فرض کنید بخواهیم مقدار $w(x,y)$ را روی یک بازه از x و y به دست آوریم: $x = x_1, x_2, \dots, x_m$ ، $y = y_1, y_2, \dots, y_n$ پس می توان در نظر گرفت:

$$w(x_i, y_j) = \sum_{l=1}^k f_l(x_i)g_l(y_j) \quad i=1,2,\dots,m \quad j=1,2,\dots,n$$

.... به عنوان نمونه یک عضو ماتریس w از مرتبه $(m \times n)$ باشد. فرض کنید f یک ماتریس از مرتبه $(m \times k)$ باشد:

$$f = \begin{bmatrix} f_1(x_1) & f_2(x_1) & \dots & f_k(x_1) \\ f_1(x_2) & f_2(x_2) & & \\ \vdots & & \ddots & \\ f_1(x_m) & & & f_k(x_m) \end{bmatrix} \rightarrow (m \times k)$$

اگر g یک ماتریس از مرتبه $(k \times n)$ باشد.

$$g = \begin{bmatrix} g_1(y_1) & g_1(y_2) & \dots & g_1(y_n) \\ g_2(y_1) & g_2(y_2) & & \\ \vdots & & \ddots & \\ g_k(y_1) & & & g_k(y_n) \end{bmatrix} \rightarrow (k \times n)$$

آنگاه خواهیم داشت :

$$w = fg = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^k f_j(x_1)g_j(y_1) & \sum_{j=1}^k f_j(x_1)g_j(y_2) & \dots & \sum_{j=1}^k f_j(x_1)g_j(y_n) \\ \sum_{j=1}^k f_j(x_2)g_j(y_1) & \sum_{j=1}^k f_j(x_2)g_j(y_2) & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \sum_{j=1}^k f_j(x_m)g_j(y_1) & & & \sum_{j=1}^k f_j(x_m)g_j(y_n) \end{bmatrix} \rightarrow$$

$(m \times n)$

به عبارت دیگر این ضرب ماتریسی، جمع سری‌ها را برای هر عضو مقادیر X و Y اجرا می‌کند.

حال سه مورد ویژه از ضرب عمومی ماتریسی را بررسی می‌کنیم:

ضرب یک بردار سطری و یک بردار ستونی

اگر a یک بردار سطری باشد:

$$a = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_k] \rightarrow (1 \times k)$$

اگر b یک بردار ستونی باشد:

$$b = [b_1 \ b_2 \ \dots \ b_k] \rightarrow (k \times 1)$$

آنگاه $d=ab$ یک عدد است.

$$d = ab = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_k] \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = [\sum_{j=1}^k a_j b_j] = \sum_{j=1}^k a_j b_j \rightarrow (1 \times 1)$$

از این رو ضرب مرتبه ها، $(1 \times k)(k \times 1) = (1 \times 1)$ را نتیجه می دهد. این نوع ضرب را حاصل ضرب نقطه ای دو بردار می نامند. عبارت حاصل ضرب نقطه ای دو بردار در متلب سایت سیم پاور به شکل زیر نیز تعریف می شود:

```
>> d=a*b
```

...

```
>> d=dot(a,b)
```

اگر C ماتریس $(n \times n)$ و x یک بردار ستونی $(n \times 1)$ باشد، آنگاه

$$f = x' c x = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i c_{ij} x_j$$

... یک عدد است، از آجا که ضرب مرتبه ها، مرتبه $(1 \times 1) = (n \times n) (n \times 1)$ را نتیجه دهد. عبارت متلب سایت سیم پاور برای معادله فوق به قرار زیر است: