۲-۴ ضرب ماتریس ها و دستگاه‌های خطی

روش دیگر ضرب ماتریس‌ها با توجه به دستگاه معادلات خطی به وجود آمده است. اگر A یک ماتریس ۲×۳ باشد و x بردار ستونی ۱×۳ باشد:

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

در نتیجه عبارت Ax یک ماتریس ۲×۱ یا یک بردار ستونی است که مولفه‌های آن به صورت زیر می‌باشند:

$$\begin{bmatrix} a_{1,1}x_1 + a_{1,2} \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2} \end{bmatrix}$$

با این تعریف با ضرب یک ماتریس در یک بردار، می‌توان یک دستگاه خطی دو معادله با سه مجهول را نوشت:

$$a_{1,1}x_1 + a_{1,2}$$
$$a_{2,1}x_1 + a_{2,2}$$

بنابراین به سادگی می‌توان نوشت:

$$Ax = b$$

که در اینجا b یک بردار ستونی ۲×۱ به صورت زیر است:

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

اگر $A=[a_{ij}]$ یک ماتریس m×n و $x=[x_1, x_2,\ldots,x_n]'$ نیز یک ماتریس n×۱ و یا به عبارتی برداری ستونی باشد، Ax به صورت یک ماتریس m×۱ یا به عبارتی برداری ستونی با i عضو تعریف می‌شود:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j$$

بنابراین دستگاه m معادله خطی با n مجهول x_j :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j = b_i \quad , i = 1,\ldots,m$$

می‌تواند به صورت زیر نوشته شود:

$Ax = b$

اگر A یک ماتریس $m \times n$ و B یک ماتریس $n \times p$ باشد و ستونهای ماتریس B به صورت $B_j=[b_{ij}]$، $j=۱,\ldots,P$ باشد می‌توان نوشت:

$AB = C$

به طوری که C یک ماتریس $m \times p$ است که ستونهایش بردارهای ستونی $m \times ۱$ بوده و به صورت $C_j=AB_j$ ، $j=۱,\ldots,P$ میباشد. بنابراین می‌توان نوشت:

$C_{i,j} = \sum_{k=۱}^{n} a_{i,k} b_{k,j}$

ضرب ماتریسی AB تنها برای A که ماتریس $m \times n$ است و B که ماتریس $n \times p$ است، تعریف شده است. تعداد ستونهای ماتریس A باید با تعداد سطرهای ماتریس B برابر باشد.

در متلب سایت سیم پاور می‌توان ماتریس‌ها را با قرار دادن علامت * بین دو ماتریس ضرب کرد. باید توجه داشت که این نوع ضرب ماتریس‌ها با علامت * بدون قرار دادن نقطه قبل از آن صورت می‌گیرد. همانطور که قبلا ذکر گردید، از علامت .... برای ضرب آرایهای استفاده می‌شود. فرض کنید ماتریسهای A و B به صورت زیر موجود است:

```
>> A=[۱ ۲; ۳ ۳; ٤ ٥];
>> B=[-۱ ۳; ٥ ۱];
>> C=A*B
C =
    ۹    ٥
   12   ۱۲
   21   ۱۷
```

در صورتیکه A یک ماتریس مربعی $n \times n$ باشد، A می‌تواند هر چند بار که مدنظر باشد در خودش ضرب شود. برای .... k بار ضرب ماتریس A در خودش، از A^k استفاده می‌شود. همچنین همانگونه که در سایت سیم پاور توضیح دادم در متلب سایت سیم پاور برای به توان رساندن ماتریس A از فرمان A^k استفاده می‌شود . باید توجه داشت که در این فرمان از نقطه استفاده نمی‌شود. فرمان A .... یک عملیات آرایه‌ای است که هریک از عضوهای ماتریس A را به توان k می‌رساند.

در صورتیکه ماتریس A ابعاد n×n و بردارستونی b، n عضو داشته باشد، معادله خطی Ax=b به روش‌های مختلفی قابل حل می‌باشد. ساده ترین راه حل این معادله خطی استفاده از فرمان A\b می‌باشد:

```
>> A=[١ ٢ ٣; ٤ ٥ ٦; ٦ ٧ ٩];
>> b=[١ ٠ ١]';
>> x=A\b
x =
   −٠.٠٠٠٠
   −2.0000
    1.6667
```

از فرمان A\b برای حل معادله خطی از روش حذف گوسی به همراه partial pivoting استفاده می‌کند.